X συνεχής ~ σ.π.π f_X

$P(X\in B) = \int_B f_X(x)\,dx \quad , B \subseteq \mathbb{R}$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> (Ιδιότητες της σ.π.π.)

α) $f_X(x) \geq 0$

β) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

} Συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση για να είναι σ.π.π

<u>Συνέπεια 4 (του ορισμού)</u>

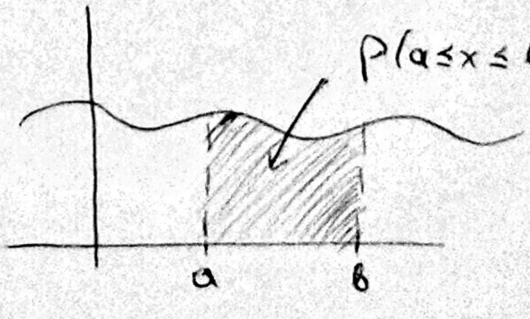
Αν η τ.μ X είναι συνεχής με σ.π.π f_X και α.σ.κ F_X τότε

α) $P(X=a) = \underbrace{F_X(a) - F_X(a-)}_{F_X \text{ συνεχής}} = F_X(a) - F_X(a) = 0$

β) λόγω της συνέχειας της F_X

$P(a<X\leq b) = P(a\leq X<b) = P(a<X<b) = P(a\leq X\leq b) = F_X(b) - F_X(a) =$

$= \int_a^b f_X(x)\,dx$



Παράδειγμα

Έστω τ.μ X με σ.π.π $f_X(x) = \begin{cases} ce^{-x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \qquad c>0$

α. Να υπολογιστεί $c=?$

β. $F_X = ?$

γ. $P(1 < X < 2) = ?$, $P(X \geq 2) = ?$, $P(X < 1) = ?$

<u>Λύση</u>

α. $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} c e^{-x}\,dx =$

$= -c\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = -c(0-1) = c$ Άρα $c = 1$

β. $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt =$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 & , x < 0 \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

γ. • $P(1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(1) = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2}$

ή

$P(1 < X < 2) = \int_{1}^{2} f_X(x)\,dx = \int_{1}^{2} e^{-x}\,dx = e^{-1} - e^{-2}$

• $P(X \geq 2) = \int_{2}^{+\infty} e^{-x}\,dx$

ή

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F_X(2)$

$\boxed{\text{Άσκηση}}$

Η σ.π.π της X δίνεται από τη σχέση

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq a \\ & , a > 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

α) $a = ?$ $F_X = ?$

β) $P(0 < X < \frac{1}{2}) = ?$, $P(X \leq \frac{1}{4}) = ?$

(Αποτιμήσεις που πρέπει να βρω)

$a=1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x^2 & , 0\le x\le 1 \\ 1 & , x>1 \end{cases}$$

$P(0<x<\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ και $P(x\le \frac{1}{4}) = \frac{15}{16}$

Ειδικές διακριτές τ.μ. και κατανομές

1) Δοκιμή Bernoulli - Διωνυμική Κατανομή

Δοκιμή Bernoulli: κάθε τ.π δυο αποτελεσμάτων $<$ Ε (Επιτυχία), Α (Αποτυχία)

Θεωρώ τυχαία πειράματα με προκαθορισμένο αριθμό δοκιμών Bernoulli.

Δ1) Αποτελούνται από προκαθορισμένο αριθμό n-επαναλήψεων μιας στοιχειώδους διαδικασίας.

Δ2) Κάθε επανάληψη έχει δύο δυνατά αποτελέσματα $<^{E}_{A}$

Σε ένα τέτοιο τ.π ενδιαφέρει το πλήθος των Ε στις n-επαναλήψεις.

Έστω X = παριστά το πλήθος των Ε στις n-επαναλήψεις

Το X είναι τ.μ. Αρκεί να βρω την κατανομή του.

Τιμές της τ.μ. X είναι $x = 0, 1, 2, \dots, n$

Για $x \in \{0, 1, \dots, n\}$

$p_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X=x) = P($το πλήθος των E είναι ίσο με $x) =$

$= P($το αποτέλεσμα περιέχει x E και $n-x$ $A) =$

$$= P(\underbrace{EEAE,\dots A}_{xE,\ n-x\,A}, \underbrace{AEAAA\dots E}_{xE,\ n-x\,A}, \dots) =$$

$= \binom{n}{x \quad n-x} P($αποτελ. περιέχει $xE, n-xA) =$

$$= \binom{n}{x} P(\text{π.χ. } \underbrace{AEEA\dots E}_{xE,\ n-xA})$$ (αν ισχύει η ανεξαρτησία των επαναλήψεων)

$$= \binom{n}{x} \underbrace{P(A)P(E)P(E)P(A)\dots\dots P(E)}_{x\,P(E) \text{ και } (n-x)\,P(A)}$$

Δ3) Οι επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες με την έννοια ότι το αποτέλεσμα δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα οποιασδήποτε άλλης

Άρα $p_X(x) = \binom{n}{x} [P(E)]^x [P(A)]^{n-x}$ (αν η $P(E)$ παραμένει αμετάβλητη από επανάληψη σε επανάληψη)

Δ4) Η $P(E)$ παραμένει αμετάβλητη από επανάληψη σε επανάληψη και ίση με p, $0<p<1$.
Οπότε $P(A) = 1-p = q$

Τότε $\boxed{p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}$

Ονομάζω διωνυμικό τ.π κάθε τ.π που ικανοποιεί τα Δ1) – Δ4)

Είναι η P_X σπ? Ναι διότι ⓐ $P_X(x) \geq 0 \quad \forall x = 0, 1, \dots \nu$

ⓑ $\sum_x P_X(x) = \sum_{x=0}^{\nu} \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x} =$

διώνυμο Νεύτωνα $= (p + (1-p))^\nu = 1^\nu = 1$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ X λέγεται διωνυμική με παραμέτρους p και ν ($0 < p < 1$, $\nu \in \mathbb{N}$) αν οι τιμές της τ.μ. X είναι $x = 0, 1, \dots, \nu$ και η σ.π είναι

$P_X(x) = \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x}$, $x = 0, 1, \dots, \nu$, $q = 1 - p$

Η X λέμε ότι ακολουθεί διωνυμική κατανομή και συμβολίζουμε

$X \sim B(\nu, p)$

Παραδείγματα

1) Ζάρι ρίχνεται 3 φορές a) P(ακριβώς 3 φορές αποτελ ≥ 4)

β) P(το πολύ μια φορά αποτελ ≥ 4).

Λύση

Έστω $E = \{$αποτελ $\geq 4\}$ και έστω X πλήθος E στις 3 επαναλ.

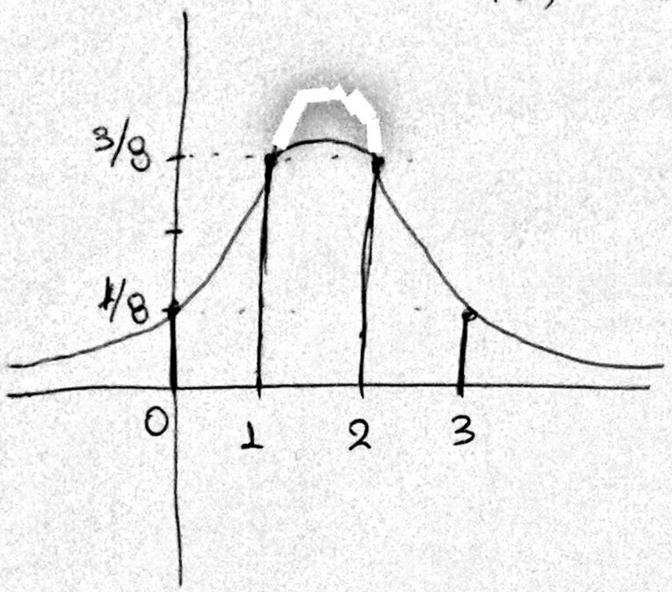
$X \sim B(\nu = 3, p = P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2})$

$P_X(x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$ $\quad x = 0, 1, 2, 3$

a) $P(X=3) = P_X(3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

β) $P(X \leq 1) = P(X=0$ ή $X=1) = P(X=0) + P(X=1) = P_X(0) + P_X(1) =$

$$=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}=0,5$$



2) Σε ένα τεστ πολλαπλής δίνονται 10 ερωτήσεις με 4 απαντήσεις σε κάθε ερώτηση, όπου 1 είναι η σωστή. Ένας φοιτητής απαντά στην τύχη τις 10 ερωτήσεις και η απάντηση στην μία ερώτηση δεν εξαρτάται από την απάντηση σε οποιαδήποτε άλλη. Αν κάθε σωστή βαθμολογείται με μία μονάδα P(περάσει μάθημα) = ?

P(πάρει 10) = ?

P(πάρει 0) = ?

Λύση

Έστω $E=\{$να απαντήσει σωστά σε οποιαδήποτε ερώτηση$\}$

Έστω X παριστά το πλήθος των σωστών απαντήσεων (πλήθος E) στις $n=10$ ερωτήσεις (επαναλήψεις)

$$X \sim B\left(n=10,\ p=P(E)=\frac{1}{4}\right)$$

$$P_X(x)=\binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} \qquad x=0,1,\dots,10$$

α) $P(\text{περάσει}) = P(X \geq 5) = \sum_{x=5}^{10} P_X(x) = \sum_{x=5}^{10} \binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} = 0{,}0781 = 7{,}81\%$

β) $P(\text{πάρει } 10) = P(X=10) = P_X(10) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{0} \simeq 0$

γ) $P(\text{πάρει } 0) = P(X=0) = P_X(0) = 0{,}0563 = 5{,}63\%$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ο πληθυσμός μιας πόλης αποτελείται από m άντρες και n γυναίκες. Επιλέγονται r άτομα στην τύχη με επανάθεση από τον πληθυσμό αυτό (επανατοποθέτηση). Ποια η πιθανότητα να υπάρχουν ακριβώς k άντρες στο δείγμα μεγέθους r?